

Corrigé Examen National Maths Sciences PC et SVT et Technologies 2025 Rattrapage 2ème année Baccalauréat - Sciences PC et SVT

Réalisé par Youssef SEMHI
Contact 0644127117 / 0708875223

Exercice 1 :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2 + u_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- 1) a) **Vérifier que :** $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{2 + u_n}$.

Corrigé :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2 + u_n} = \frac{3u_n + 6 - 4}{2 + u_n} = \frac{3(2 + u_n) - 4}{2 + u_n} = 3 - \frac{4}{2 + u_n}.$$

$$\boxed{u_{n+1} = 3 - \frac{4}{2 + u_n}}$$

- b) **Montrer par récurrence que :** $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 2$.

Corrigé :

Initialisation : $u_0 = \frac{3}{2}$ donc $0 < u_0 < 2$.

Hérédité : supposons $0 < u_n < 2$. Alors $2 + u_n > 2$ donc $0 < \frac{4}{2 + u_n} < 2$. Ainsi :

$$u_{n+1} = 3 - \frac{4}{2 + u_n} > 3 - 2 = 1 > 0.$$

De plus, $u_n < 2 \Rightarrow 2 + u_n < 4 \Rightarrow \frac{4}{2 + u_n} > 1$ donc :

$$u_{n+1} = 3 - \frac{4}{2 + u_n} < 3 - 1 = 2.$$

Donc $0 < u_{n+1} < 2$.

Par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 2.}$$

- 2) a) **Montrer que :** $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 + u_n)(2 - u_n)}{2 + u_n}$.

Corrigé :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{2 + u_n} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n(2 + u_n)}{2 + u_n} = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{2 + u_n}.$$

Or $-u_n^2 + u_n + 2 = (1 + u_n)(2 - u_n)$, donc :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1 + u_n)(2 - u_n)}{2 + u_n}.$$

b) **Montrer que (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.**

Corrigé :

D'après 1b), on a $0 < u_n < 2$, donc :

$$1 + u_n > 0, \quad 2 - u_n > 0, \quad 2 + u_n > 0.$$

Ainsi :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1 + u_n)(2 - u_n)}{2 + u_n} > 0,$$

donc (u_n) est strictement croissante.

De plus, $u_n < 2$ pour tout n , donc (u_n) est croissante et majorée, ainsi elle est convergente.

$$(u_n) \text{ est croissante et convergente.}$$

c) **Montrer que : $0 < 2 - u_{n+1} \leq \frac{2}{7}(2 - u_n)$.**

Corrigé :

On a :

$$2 - u_{n+1} = 2 - \frac{3u_n + 2}{2 + u_n} = \frac{2(2 + u_n) - (3u_n + 2)}{2 + u_n} = \frac{2 - u_n}{2 + u_n}.$$

Comme (u_n) est croissante et $u_0 = \frac{3}{2}$, on a $u_n \geq \frac{3}{2}$, donc :

$$2 + u_n \geq 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \implies \frac{1}{2 + u_n} \leq \frac{2}{7}.$$

D'où :

$$0 < 2 - u_{n+1} = \frac{2 - u_n}{2 + u_n} \leq \frac{2}{7}(2 - u_n).$$

$$0 < 2 - u_{n+1} \leq \frac{2}{7}(2 - u_n).$$

d) **Déduire que : $0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^n$.**

Corrigé :

Par récurrence à partir de l'inégalité précédente :

$$2 - u_n \leq \left(\frac{2}{7}\right)^n (2 - u_0).$$

Or $2 - u_0 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, donc :

$$0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^n.$$

e) **Déterminer la limite de la suite (u_n) .**

Corrigé :

Comme $\left(\frac{2}{7}\right)^n \rightarrow 0$, on a $2 - u_n \rightarrow 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2.$$

Exercice 2 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

$$A(0, 3, 3), \quad B(1, 2, 1), \quad C(2, 3, 1), \quad \vec{n}(1, -1, 1),$$

et le plan (P) d'équation : $x - y + z - 6 = 0$.

- 1) a) **Montrer que $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 2\vec{n}$ et déduire que A, B, C ne sont pas alignés.**

Corrigé :

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (1, -1, -2), & \vec{AC} &= (2, 0, -2). \\ \vec{AB} \wedge \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (2, -2, 2) = 2(1, -1, 1) = 2\vec{n}. \end{aligned}$$

Donc $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$, ainsi A, B, C ne sont pas alignés.

$$\boxed{\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 2\vec{n} \Rightarrow A, B, C \text{ non alignés.}}$$

- b) **Montrer que les plans (ABC) et (P) sont parallèles.**

Corrigé :

Le vecteur $\vec{n}(1, -1, 1)$ est normal au plan (P) . Or $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 2\vec{n}$ montre que $\vec{n}$ est aussi normal à (ABC) . Donc les deux plans ont des vecteurs normaux colinéaires, alors ils sont parallèles :

$$\boxed{(ABC) \parallel (P).}$$

- 2) Soit (S) une sphère telle que (ABC) est tangent à (S) en A et (P) tangent à (S) en un point H .

- a) **Calculer $d(A, (P))$ et déduire que le rayon de (S) est $\sqrt{3}$.**

Corrigé :

$$d(A, (P)) = \frac{|0 - 3 + 3 - 6|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Les plans (ABC) et (P) étant parallèles et tangents à la même sphère, la distance entre eux vaut $2r$. Or cette distance est $2\sqrt{3}$, donc :

$$2r = 2\sqrt{3} \Rightarrow r = \sqrt{3}.$$

$$\boxed{r = \sqrt{3}.}$$

- b) **Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et orthogonale au plan (P) .**

Corrigé :

Une droite orthogonale à (P) a pour vecteur directeur $\vec{n}(1, -1, 1)$, donc :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

- c) **Montrer que les coordonnées de H sont $(2, 1, 5)$.**

Corrigé :

H est l'intersection de (Δ) et (P) . On remplace dans $x - y + z - 6 = 0$:

$$t - (3 - t) + (3 + t) - 6 = 3t - 6 = 0 \Rightarrow t = 2.$$

Donc :

$$\boxed{H(2, 1, 5)}.$$

- d) **Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z + 18 = 0$ est une équation de (S) .**

Corrigé :

Le centre Ω de la sphère est le milieu de $[AH]$:

$$\Omega \left(\frac{0+2}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{3+5}{2} \right)$$

$$\Omega(1, 2, 4)$$

Avec $r = \sqrt{3}$, l'équation est :

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 3.$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z + 18 = 0}.$$

- 3) **Déterminer les deux points d'intersection de la droite (BH) et la sphère (S) .**

Corrigé :

La droite (BH) : $B(1, 2, 1)$, $H(2, 1, 5)$, vecteur directeur $(1, -1, 4)$.

$$(BH) : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 - s \\ z = 1 + 4s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

On remplace dans $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 3$:

$$s^2 + s^2 + (4s-3)^2 = 3 \Rightarrow 18s^2 - 24s + 6 = 0 \Rightarrow 3s^2 - 4s + 1 = 0.$$

Donc $s = 1$ ou $s = \frac{1}{3}$.

$$s = 1 \Rightarrow (2, 1, 5) = H, \quad s = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3} \right).$$

$$\boxed{(BH) \cap (S) = \left\{ H(2, 1, 5), \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3} \right) \right\}}.$$

Exercice 3 :

Dans le plan complexe, on considère :

$$a = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, \quad b = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad c = 1 + a, \quad d = \bar{c}.$$

- 1) **Vérifier que $|a| = 1$ et $\arg(a) = \frac{5\pi}{6} [2\pi]$.**

Corrigé :

On a

$$a = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}.$$

Donc

$$|a| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} a &= -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ a &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{a = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)} \implies \boxed{\arg(a) = \frac{5\pi}{6} [2\pi]}.$$

- 2) **Vérifier que $\frac{c-d}{c-a} = i$ et déduire que ACD est isocèle rectangle en C .**

Corrigé :

On a $c = 1 + a$, donc

$$c - a = 1.$$

De plus $d = \bar{c}$, ainsi

$$c - d = c - \bar{c} = i.$$

Donc

$$\frac{c-d}{c-a} = \frac{i}{1} = i \implies c-d = i(c-a).$$

Or

$$d - c = -(c - d) = -i(c - a)$$

Ainsi,

$$\frac{c-d}{c-a} = \frac{i}{1} = i.$$

$$\arg\left(\frac{c-d}{c-a}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

Par conséquent, $CA = CD$ et $\widehat{ACD} = \frac{\pi}{2}$, d'où :

$$\boxed{ACD \text{ isocèle rectangle en } C.}$$

- 3) a) **Montrer que $d - a = 1 - i$ et $b - d = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$.**

Corrigé :

$$c = 1 + a = \frac{2 - \sqrt{3} + i}{2} \Rightarrow d = \bar{c} = \frac{2 - \sqrt{3} - i}{2}.$$

Donc :

$$d - a = \frac{2 - \sqrt{3} - i}{2} - \frac{-\sqrt{3} + i}{2} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i.$$

Et :

$$b - d = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} - \frac{2 - \sqrt{3} - i}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1 + i(1 - \sqrt{3})}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i).$$

$$d - a = 1 - i, \quad b - d = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i).$$

b) **Déduire que les points A, D, B sont alignés.**

Corrigé :

On a

$$b - d = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i) \quad \text{et} \quad a - d = 1 - i.$$

Ainsi :

$$\frac{b - d}{a - d} = \frac{\frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)}{1 - i} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \in \mathbb{R}_+.$$

Donc

$$\arg\left(\frac{b - d}{a - d}\right) = 0 [2\pi].$$

Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$ ont la même direction, ils sont colinéaires, ce qui implique que les points A, D et B sont alignés.

$$A, D, B \text{ sont alignés.}$$

4) Soit R la transformation : $z' = az$.

a) **Vérifier que R est une rotation et déterminer son centre et son angle.**

Corrigé :

Comme $|a| = 1$, donc $z' = 0 + ze^{i\frac{5\pi}{6}}$ est une rotation de centre O et d'angle $\arg(a) = \frac{5\pi}{6}$.

$$R \text{ est la rotation de centre } O \text{ et d'angle } \frac{5\pi}{6}.$$

b) **Vérifier que $ad = c$ et déduire que $R(D) = C$.**

Corrigé :

On a

$$a = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} \quad \text{et} \quad c = 1 + a = \frac{2 - \sqrt{3} + i}{2}.$$

Donc

$$d = \bar{c} = \frac{2 - \sqrt{3} - i}{2}.$$

Calculons ad :

$$ad = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} \cdot \frac{2 - \sqrt{3} - i}{2} = \frac{1}{4} [(-\sqrt{3} + i)(2 - \sqrt{3} - i)].$$

Ainsi :

$$ad = \frac{4 - 2\sqrt{3} + 2i}{4} = \frac{2 - \sqrt{3} + i}{2} = c.$$

Donc :

$$z' = az_D = ad = c.$$

Par conséquent, l'image du point D par la transformation R est le point C , c'est-à-dire :

$$\boxed{R(D) = C.}$$

c) **Montrer que** $\arg(c) = \frac{5\pi}{12} [2\pi]$.

Corrigé :

On a :

$$ad = c.$$

Donc :

$$\arg(c) = \arg(a) + \arg(d) [2\pi].$$

Or $d = \bar{c}$, donc :

$$\arg(d) = \arg(\bar{c}) = -\arg(c) [2\pi].$$

Ainsi :

$$\arg(c) = \arg(a) - \arg(c) [2\pi] \implies 2\arg(c) = \arg(a) [2\pi].$$

D'après la question précédente, on sait que :

$$\arg(a) = \frac{5\pi}{6} [2\pi].$$

Donc :

$$2\arg(c) = \frac{5\pi}{6} [2\pi] \implies \arg(c) = \frac{5\pi}{12} [2\pi].$$

$$\boxed{\arg(c) = \frac{5\pi}{12} [2\pi].}$$

Exercice 4 :

Un sac contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement sans remise deux boules.

1) a) **Calculer** $p(G)$.

Corrigé :

On effectue deux tirages successifs sans remise, donc **arrangements de 2 boules parmi 7**.

Le nombre total d'issues possibles est :

$$A_7^2 = 7 \times 6 = 42.$$

Le nombre d'issues favorables est donc :

$$A_4^2 = 12.$$

Ainsi :

$$p(G) = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}.$$

$$p(G) = \frac{2}{7}$$

b) **Montrer que** $p(Z) = \frac{4}{7}$.

Corrigé :

L'évènement Z correspond au tirage de deux boules de couleurs différentes, ce qui peut se produire de deux façons :

- première blanche puis noire ;
- première noire puis blanche.

Nombre d'issues favorables :

$$A_4^1 \times A_3^1 + A_3^1 \times A_4^1 = 4 \times 3 + 3 \times 4 = 24.$$

Ainsi :

$$p(Z) = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}.$$

$$p(Z) = \frac{4}{7}.$$

2) a) **Calculer** $p(N_1 \cap B_2)$.

L'évènement $N_1 \cap B_2$ correspond au tirage :

- d'une boule noire en premier ;
- puis d'une boule blanche en second.

Le nombre d'issues favorables est :

$$A_3^1 \times A_4^1 = 3 \times 4 = 12.$$

Donc :

$$p(N_1 \cap B_2) = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}.$$

$$p(N_1 \cap B_2) = \frac{2}{7}.$$

b) **Montrer que** $p(B_2) = \frac{4}{7}$.

Corrigé :

L'évènement B_2 est réalisé lorsque la **deuxième boule est blanche**.

- choix de la boule blanche en deuxième position : 4 possibilités ;
- choix de la première boule parmi les 6 restantes : 6 possibilités.

Donc le nombre d'issues favorables est :

$$4 \times 6 = 24.$$

Ainsi :

$$p(B_2) = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}.$$

$$p(B_2) = \frac{4}{7}.$$

- c) **Déduire la probabilité de “noter 0” sachant que la deuxième boule tirée est blanche.**

Corrigé :

Avoir Z et B_2 signifie que la 1ère boule est noire et la 2ème blanche :

$$Z \cap B_2 = N_1 \cap B_2.$$

Donc :

$$p(Z | B_2) = \frac{p(Z \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{p(Z | B_2) = \frac{1}{2}.$$

Problème :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 2}.$$

On note (C_f) sa courbe représentative.

- 1) **Calculer $f(0)$ et $f(\ln 2)$.**

Corrigé :

$$f(0) = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}, \quad f(\ln 2) = \ln 2 - 1 + \frac{4}{4} = \ln 2.$$

$$\boxed{f(0) = \frac{1}{3}, \quad f(\ln 2) = \ln 2.}$$

- 2) a) **Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.**

Corrigé :

On a :

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 2}.$$

En $+\infty$:

Comme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x + 2} = 0,$$

on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 + \frac{4}{e^x + 2} \right) = +\infty.$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.}$$

En $-\infty$:

Comme :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{e^x + 2} = 2,$$

on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 1 + \frac{4}{e^x + 2} \right) = -\infty.$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.}$$

b) **Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$ et interpréter.**

Corrigé :

On a :

$$f(x) - (x - 1) = \frac{4}{e^x + 2}.$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x + 2} = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0.$$

Donc, la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

$$\boxed{y = x - 1 \text{ est une asymptote oblique à } (C_f) \text{ au voisinage de } +\infty.}$$

3) a) **Vérifier que $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 2}$.**

Corrigé :

On a :

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 2}.$$

Or :

$$\frac{4}{e^x + 2} = \frac{2(e^x + 2) - 2e^x}{e^x + 2} = 2 - \frac{2e^x}{e^x + 2}.$$

Donc :

$$f(x) = x - 1 + 2 - \frac{2e^x}{e^x + 2} = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 2}.$$

$$\boxed{f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 2}.$$

b) **Déduire que $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $-\infty$.**

Corrigé :

On a :

$$f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 2}.$$

Donc :

$$f(x) - (x + 1) = -\frac{2e^x}{e^x + 2}.$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x + 1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2e^x}{e^x + 2} \right) = -\frac{0}{2} = 0.$$

Ainsi, la droite $y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$:

$$\boxed{y = x + 1 \text{ est une asymptote oblique au voisinage de } -\infty.}$$

c) **Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 < f(x) - x < 1$.**

Corrigé :

$$f(x) - x = -1 + \frac{4}{e^x + 2}.$$

Or $e^x + 2 > 2$, donc :

$$0 < \frac{4}{e^x + 2} < 2 \Rightarrow -1 < -1 + \frac{4}{e^x + 2} < 1.$$

$$\boxed{-1 < f(x) - x < 1.}$$

4) a) **Montrer que : $f'(x) = \frac{e^{2x} + 4}{(e^x + 2)^2}$.**

Corrigé :

$$f'(x) = 1 + \left(\frac{4}{e^x + 2} \right)' = 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{(e^x + 2)^2 - 4e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^{2x} + 4}{(e^x + 2)^2}.$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^{2x} + 4}{(e^x + 2)^2}.$$

b) **Déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

Corrigé :

Pour tout x , on a $e^{2x} + 4 > 0$ et $(e^x + 2)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$.

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

5) a) **Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique. Corrigé :**

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{R}$, on a

$$m \in] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [=] -\infty, +\infty [.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = m$ admet au moins une unique solution réelle.

- b) Soit α l'unique solution de $f(x) = 0$. Montrer que $-1 < \alpha < 0$ et que $e^\alpha = \frac{2(1+\alpha)}{1-\alpha}$.

Corrigé :

On sait que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Et :

$$f(0) = 0 - 1 + \frac{4}{e^0 + 2} = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3} > 0.$$

$$f(-1) = -1 - 1 + \frac{4}{e^{-1} + 2} = -2 + \frac{4}{\frac{1}{e} + 2} = -2 + \frac{4e}{1 + 2e}.$$

Or

$$\frac{4e}{1 + 2e} < \frac{4e}{2e} = 2 \implies -2 + \frac{4e}{1 + 2e} < 0,$$

donc

$$f(-1) < 0.$$

Ainsi :

$$f(-1) f(0) < 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $\alpha \in]-1, 0[$ tel que

$$f(\alpha) = 0.$$

$$\boxed{\exists \alpha \in]-1, 0[\text{ tel que } f(\alpha) = 0.}$$

- 6) a) Montrer que : $f''(x) = \frac{4e^x(e^x - 2)}{(e^x + 2)^3}$.

Corrigé :

On a :

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 2)^2}.$$

Alors :

$$f''(x) = -4 \left(\frac{e^x}{(e^x + 2)^2} \right)'.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^x}{(e^x + 2)^2} \right)' &= (uv)' = u'v + uv' \\ &= e^x(e^x + 2)^{-2} + e^x(-2e^x(e^x + 2)^{-3}) \\ &= \frac{e^x}{(e^x + 2)^2} - \frac{2e^{2x}}{(e^x + 2)^3} \\ &= \frac{e^x(e^x + 2) - 2e^{2x}}{(e^x + 2)^3} \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x - 2e^{2x}}{(e^x + 2)^3} \\ &= \frac{-e^{2x} + 2e^x}{(e^x + 2)^3} = \frac{e^x(2 - e^x)}{(e^x + 2)^3}. \end{aligned}$$

Donc

$$f''(x) = -4 \cdot \frac{e^x(2 - e^x)}{(e^x + 2)^3} = \frac{4e^x(e^x - 2)}{(e^x + 2)^3}.$$

$$f''(x) = \frac{4e^x(e^x - 2)}{(e^x + 2)^3}.$$

b) **Étudier le signe de $e^x - 2$ sur $\mathbb{R}$.**

Corrigé :

$$e^x - 2 < 0 \iff x < \ln 2, \quad e^x - 2 = 0 \iff x = \ln 2, \quad e^x - 2 > 0 \iff x > \ln 2.$$

c) **Déduire que (C_f) admet un point d'inflexion que l'on déterminera.**

Corrigé :

Comme $\frac{4e^x}{(e^x + 2)^3} > 0$, le signe de f'' est celui de $e^x - 2$. Donc f'' change de signe en $x = \ln 2$, ainsi (C_f) admet un point d'inflexion en :

$$I(\ln 2, f(\ln 2)) = (\ln 2, \ln 2).$$

$$I(\ln 2, \ln 2) \text{ est un point d'inflexion.}$$

d) **Montrer que $y = \frac{1}{2}x + \frac{\ln 2}{2}$ est la tangente à (C_f) au point d'abscisse $\ln 2$.**

Corrigé :

On a $f(\ln 2) = \ln 2$ et :

$$f'(\ln 2) = \frac{e^{2\ln 2} + 4}{(e^{\ln 2} + 2)^2} = \frac{4 + 4}{(2 + 2)^2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

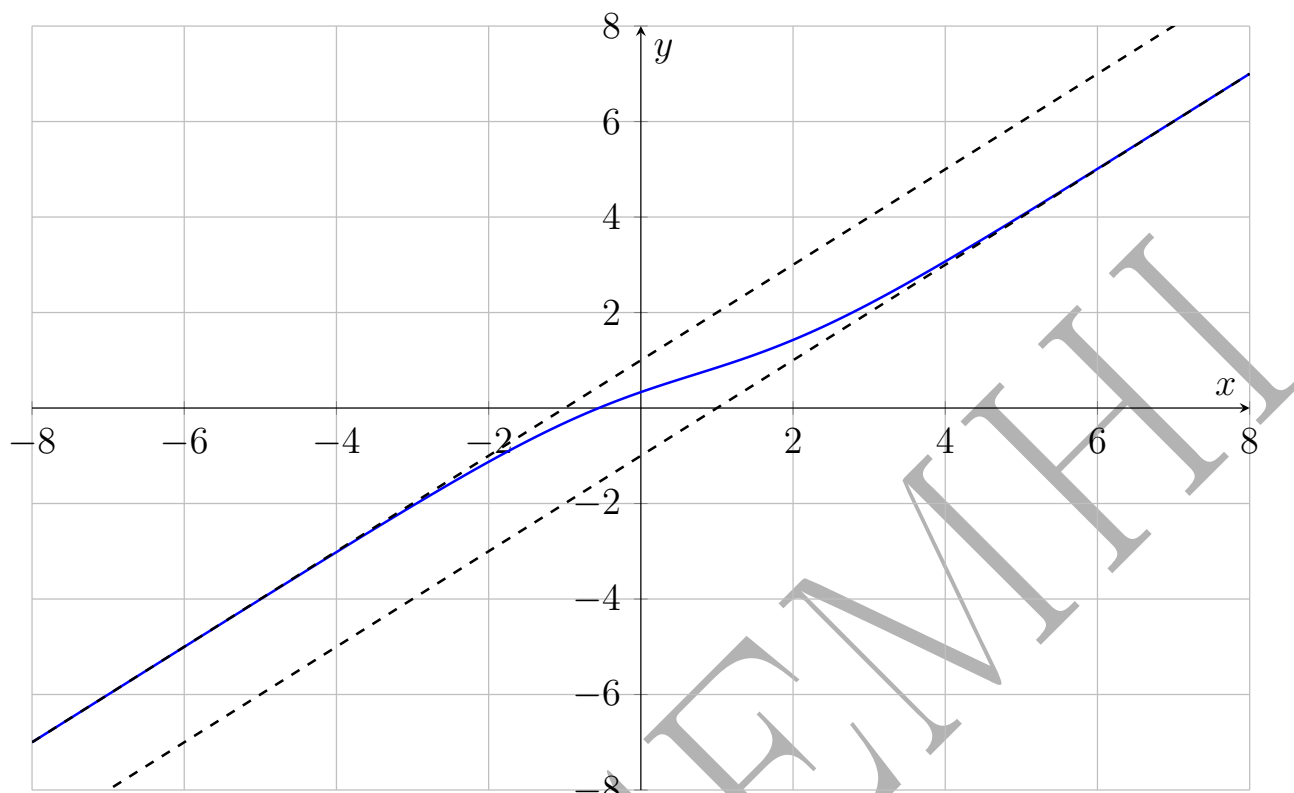
Donc l'équation de la tangente en $x_0 = \ln 2$ est :

$$y = f(\ln 2) + f'(\ln 2)(x - \ln 2) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - \ln 2) = \frac{1}{2}x + \frac{\ln 2}{2}.$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{\ln 2}{2}.$$

7) **Construire la courbe (C_f) .**

Corrigé :



8) a) **Montrer que** $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 2} dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \right)$.

Corrigé :

Posons $u = e^x$ alors $du = u dx$ donc $dx = \frac{du}{u}$. Quand $x = 0$, $u = 1$; quand $x = \ln 2$, $u = 2$.

$$\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 2} dx = \int_1^2 \frac{1}{u + 2} \cdot \frac{du}{u} = \int_1^2 \frac{1}{u(u + 2)} du.$$

Or :

$$\frac{1}{u(u + 2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u + 2} \right).$$

Donc :

$$\int_1^2 \frac{1}{u(u + 2)} du = \frac{1}{2} [\ln u - \ln(u + 2)]_1^2 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \right).$$

$$\boxed{\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 2} dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \right)}.$$

b) **Calculer l'aire demandée.**

Corrigé :

Sur $[0, \ln 2]$:

$$f(x) - (x - 1) = \frac{4}{e^x + 2} > 0.$$

Donc l'aire vaut :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\ln 2} (f(x) - (x - 1)) dx = \int_0^{\ln 2} \frac{4}{e^x + 2} dx = 4 \cdot \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \right) = 2 \ln \left(\frac{3}{2} \right).$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 2 \ln \left(\frac{3}{2} \right) \text{ unités d'aire.}}$$